Тепих који су изгризли мољци

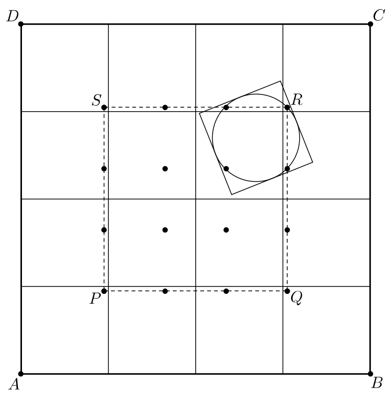
Задатак 1. *Дат је квадрат $ABCD$ странице 4. Одредити највећи природан број k такав да, за ма какав распоред k тачака унутар квадрата $ABCD$, увек постоји квадрат странице 1, садржан у квадрату $ABCD$, у чијој унутрашњости нема ниједне од посматраних k тачака.*

Решење. Одговор: $k = 15$. Јасно је да 15 тачака има тражену особину: квадрат $ABCD$ можемо изделити на 16 квадрата странице 1, те ма како да је 15 тачака распоређено унутар квадрата $ABCD$, Дирихлеов принцип гарантује да постоји квадрат странице 1 унутар ког се не налази ниједна од посматраних тачака. Докажимо сада да k не може бити веће од 15, тј. да се 16 тачака може распоредити унутар квадрата $ABCD$ на тај начин да се унутар квадрата $ABCD$ не може наћи квадрат странице 1 у ком нема ниједне од посматраних тачака.

Претпоставимо да је теме A квадрата $ABCD$ у тачки $(0,0)$, а теме B у тачки $(4,0)$. Поставимо 16 тачака на следеће координате:

$$\left(1-\varepsilon+i\frac{2+2\varepsilon}{3}, 1-\varepsilon+j\frac{2+2\varepsilon}{3}\right),\ 0 \leqslant i,j \leqslant 3,$$

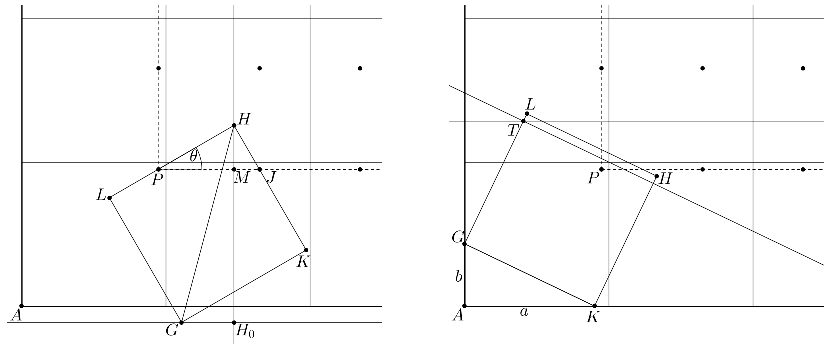
где је ε величина која ће бити накнадно одабрана. На тај начин постављених 16 тачака чине квадратну мрежу с кораком $\frac{2+2\varepsilon}{3}$. Нека је $PQRS$ квадрат којим је ова мрежа омеђена (видети слику).



Потребно је показати да се у унутрашњости сваког јединичног квадрата садржаног у квадрату $ABCD$ налази бар једна од ових тачака (за погодно ε). Посматрамо најпре јединичан квадрат чији се центар налази у квадрату $PQRS$. Приметимо да, за сваку тачку унутар квадрата $PQRS$, постоји бар једна од постављених 16 тачака удаљена од посматране тачке не више од $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2+2\varepsilon}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}(1+\varepsilon)$. Одатле, ако је ε довољно мало, сваки круг чији је центар унутар квадрата $PQRS$ и полупречник $\frac{1}{2}$ садржи бар једну од постављених 16 тачака, па тим пре то важи и за јединични квадрат чији је центар унутар квадрата $PQRS$.

Посматрајмо сада јединични квадрат чији се центар не налази у квадрату $PQRS$. Тада можемо, без умањења општости, претпоставити да важи један од следећа два случаја:

- на двема суседним страницама посматраног јединичног квадрата налази се по једна од постављених 16 тачака, и то од оних са руба квадрата $PQRS$ (слика лево);
- два суседна темена посматраног јединичног квадрата налазе се на двема суседним страницама квадрата $ABCD$ (слика десно).



Размотримо најпре први случај. Нека је $KHLG$ јединични квадрат и нека се на његовим страницама KH и HL налазе тачке P и J (две од постављених 16 тачака, са руба квадрата $PQRS$). Означимо $\measuredangle HPJ = \theta$ (можемо претпоставити: $\theta \leqslant 45^\circ$), нека је M подножје нормале из H на PJ, и нека је H_0 подножје нормале из G на $p(H, M)$. Доказаћемо да се теме G налази изван квадрата $ABCD$; довољно је доказати $|H_0H| > (1-\varepsilon) + |MH|$. Како важи и $\measuredangle JHM = \theta$, израчунавамо

$$|MH| = |JH|\cos\theta = |JP|\sin\theta\cos\theta = \frac{2+2\varepsilon}{3}\sin\theta\cos\theta.$$

Даље, важи $\measuredangle GHH_0 = 45^\circ - \measuredangle JHM = 45^\circ - \theta$, одакле следи

$$\begin{aligned}|HH_0| &= |HG|\cos\measuredangle GHH_0 = \sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ-\theta)\\ &= \sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos\theta + \sin 45^\circ\sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta.\end{aligned}$$

Одатле, треба заправо доказати неједнакост $\cos\theta + \sin\theta - (1-\varepsilon) - \frac{2+2\varepsilon}{3}\sin\theta\cos\theta > 0$. Приметимо:

$$\begin{aligned}\cos\theta + &\sin\theta - (1-\varepsilon) - \tfrac{2+2\varepsilon}{3}\sin\theta\cos\theta\\ &= \cos\theta + \sin\theta - (1-\varepsilon) - \frac{1+\varepsilon}{3}(\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) + \frac{1+\varepsilon}{3}\\ &= \cos\theta + \sin\theta - \frac{2-4\varepsilon}{3} - \frac{1+\varepsilon}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^2.\end{aligned}$$

Квадратна функција $f(x) = -\frac{1+\varepsilon}{3}x^2 + x - \frac{2-4\varepsilon}{3}$ позитивна је за $x \in \left(\frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon}, 2\right)$. Како за $0 \leqslant \theta \leqslant 45^\circ$ важи $\sin\theta + \cos\theta < 2$ и $\sin\theta + \cos\theta > \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 > \frac{1-2\varepsilon}{1+\varepsilon}$, тиме је овај случај завршен.

Пређимо сада на други случај. Означимо $|AK| = a$, $|AG| = b$ (при чему важи $a^2 + b^2 = 1$). Једначина праве GL јесте $y = \frac{a}{b}x + b$. Посматрајмо нормалу из тачке $(1,1)$ на праву GL. Једначина ове нормале је

$y=-\frac{b}{a}x+1+\frac{b}{a}$. Одатле се лако налази да ова нормала сече праву GL у тачки $T:(ab+b^2-ab^2, a^2+ab+b^3)$. Тврдимо да важи $|GT|<1$. Заиста,

$$\begin{aligned}|GT|^2 &= (a^2+ab+b^3-b)^2+(ab+b^2-ab^2)^2\\ &= (a^2+ab+b(b^2-1))^2+(ab+b^2-ab^2)^2\\ &= (a^2+ab-a^2b)^2+(ab+b^2-ab^2)^2 = a^2(a+b-ab)^2+b^2(a+b-ab)^2\\ &= (a+b-ab)^2(a^2+b^2)=(a+b-ab)^2;\end{aligned}$$

дакле, потребно је доказати $a+b-ab<1$, што је еквивалентно са $(1-a)(1-b)>0$, а ово је очигледно тачно.

Из $|GT|<1$ следи да се тачка $(1,1)$ налази унутар квадрата $ABCD$, а тиме и тачка P. Контрадикција. Тиме је задатак решен. $\square$